PRINCIPIO DE INDUCCIÓN

- Axioma del Buen Orden en los naturales
- Principio de Inducción (I)
- Principio de Inducción (II)
- Principio Fuerte de Inducción

Ángeles Martínez Sánchez   Curso 2016/2017
DMATIC   ETSISI

Bibliografía básica:

- Matemática Discreta. Libro de la asignatura. Cap. 4
- Matemática Discreta y sus aplicaciones.
  K.H. Rosen. Mc Graw Hill. Cap. 3

Material de trabajo:

- Matemática Discreta. Problemas. Hoja 3.
- Actividad de Aprendizaje (Moodle)

Este material es un esquema de definiciones, propiedades y resultados básicos. En clase se completará añadiendo ejemplos. El desarrollo de la teoría se puede ver en el libro de la asignatura.

Axioma del Buen Orden en los naturales: Todo conjunto no vacío de números naturales tiene mínimo.

Principio de Inducción (I): Sea P una propiedad de los números naturales que satisface las dos condiciones siguientes:

- P(0) es verdadera.
- Para todo $n \geq 0$, si P(n) es verdadera, entonces P(n+1) también es verdadera.

Entonces P(n) es verdadera para todo $n \geq 0$.

Esquema:

- Paso base: Verificar P(0)
- Paso de inducción:
  - Escribir la propiedad P(n) en un n genérico, n ≥ 0 (H. I.) Hipótesis de inducción
  - Plantear y verificar la propiedad en n+1, P(n+1) usando (H.I.) + álgebra

<u>Ejemplo</u>: $$0+1+2+....+n=\frac{(1+n)n}{2} \qquad \forall n \geq 0 \qquad (n \geq 1)$$

Paso base: ¿la igualdad es cierta en n=0?

¿ 0 = (1+0)0/2 ? 0=0 es cierta

Paso de inducción:

Suponemos 1+2+....+n = (1+n)/2 en un n$\geq$0 (H.I.)

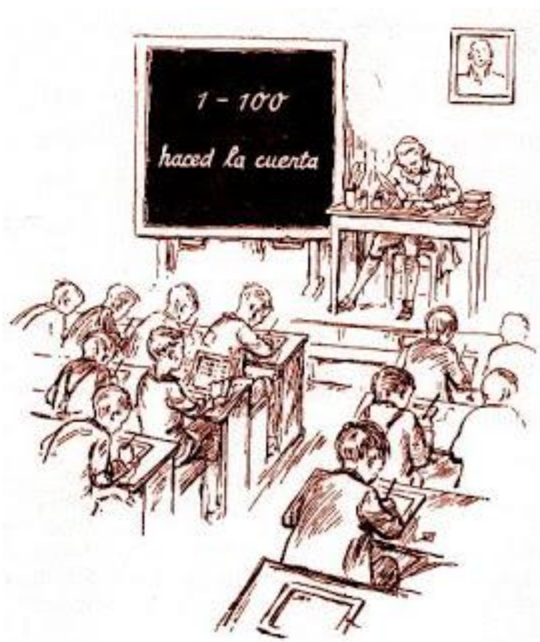
¿1 + 2 +....+ n + (n+1) = (1+(n+1))(n+1)/2?

1+2+....+n+ (n+1) = [1+2+....+n] + (n+1) = (H.I.)

= (1+n)n/2 + (n+1) = ((1+n)n+2(n+1))/2 = (n+1)(n+2)/2

Por lo tanto la igualdad es cierta $\forall$n $\geq$0

Gauss 1777-1855



$$1+2+....+n=\frac{(1+n)n}{2}$$

$$1+2+\cdots+100=\frac{(1+100)100}{2}=\frac{101\cdot 100}{2}=5050$$

$$\begin{array}{r} 100+99+98+\dots+2+1=X \\ 1+2+3+\dots+99+100=X \\ \hline \underbrace{101+101+101+\dots+101+101}_{\text{¡100 VECES!}}=2X \end{array}$$

$\Rightarrow$ (ENTONCES) $100\times 101=2X$

$$\frac{100\times 101}{2}=X$$

$\therefore$ (POR LO TANTO) $X=5050$ //

Principio de Inducción (I): Sea P una propiedad de los números naturales que satisface las dos condiciones siguientes:

- P(k) es verdadera en un k particular.
- Para todo $n \geq k$, si P(n) es verdadera, entonces P(n+1) también es verdadera.

Entonces P(n) es verdadera para todo $n \geq k$.

Ejemplos: Usar el Principio de inducción para probar las siguientes igualdades

$$1+2+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}-1 \qquad \forall n\geq 0$$

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2 \qquad \forall n\geq 1$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \qquad \forall n\geq 1$$

Ejemplos: Usar el Principio de inducción para probar las siguientes propiedades (desigualdades)

$$2^n < n! \qquad \forall n \geq 4$$

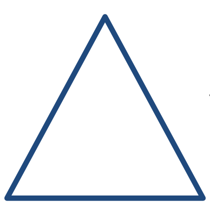
$$a_n = \begin{cases} 1 & si \quad n = 0 \\ \sqrt{2 + a_{n-1}} & si \;\; n \geq 1 \end{cases}$$

Es monótona y acotada

Ejemplos: Usar el Principio de inducción para probar las siguiente propiedad (geométrica)

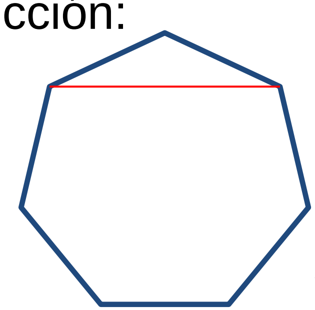
La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados (n ángulos) n $\geq$3, vale (n-2)π

Paso base:



Suma = π

Paso de inducción:



Suma = Suma1 + Suma2

¿Cuál es la conexión entre el paso base y el de inducción?

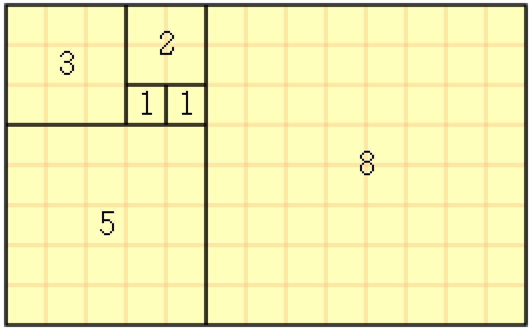
Sea P(n) una propiedad que depende de los números naturales de la que se sabe que P(8) es cierta y para todo n ≥ 5 si P(n) es cierta, entonces P(n+1) también es cierta. Se puede garantizar que:

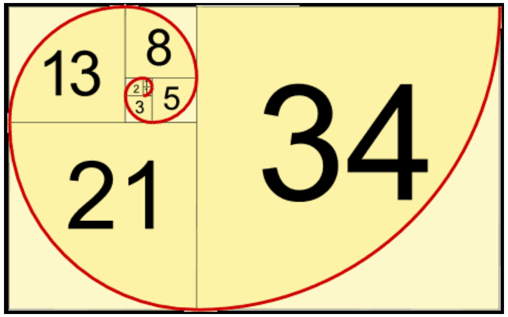
a. P(n) es cierta para todo $n \geq 5$
b. P(n) es cierta para todo $n \geq 8$
c. P(n) es cierta en $n=8$

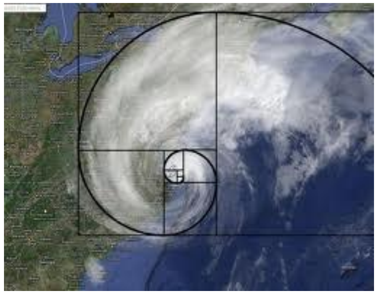
Sea P(n) una propiedad que depende de los números naturales de la que se sabe que P(7) es cierta y para todo $n \geq 10$ si P(n) es cierta, entonces P(n+1) también es cierta. Se puede garantizar que:

a. P(n) es cierta para todo $n \geq 7$
b. P(n) es cierta para todo $n \geq 10$
c. P(n) es cierta en $n = 7$

Sucesión de Fibonacci







$$F(n) = \begin{cases} 1 & si \;\; n = 1 \\ 1 & si \;\; n = 2 \\ F(n-1) + F(n-2) & si \;\; n \geq 3 \end{cases}$$

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \qquad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \lim \frac{F(n+1)}{F(n)}$$

Principio de Inducción (II): Sea P una propiedad de los números naturales que satisface las dos condiciones siguientes:

- P(0), P(1) son verdaderas.
- Para todo $n \geq 0$, si P(n) y P(n+1) son verdaderas, entonces P(n+2) también es verdadera.

Entonces P(n) es verdadera para todo $n \geq 0$.

Ejemplo: Usar el método de inducción para probar la igualdad de las siguientes expresiones $\forall n \geq 0$.

$$A(n) = \begin{cases} 2 & si \;\; n = 0 \\ 5 & si \;\; n = 1 \\ 5A(n-1) - 6A(n-2) & si \;\; n \geq 2 \end{cases} \qquad B(n) = 2^n + 3^n$$

Principio Fuerte de Inducción: Sea P una propiedad de los números naturales que satisface las dos condiciones siguientes:

- $P(0)$ es verdadera.
- Para todo $n \geq 0$, si $P(0), P(1), \ldots, P(n)$ son verdaderas, entonces $P(n+1)$ también es verdadera.

Entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq 0$.

Ejemplo: Usar el Principio Fuerte de inducción para probar que todo natural $n \geq 2$ se puede descomponer en producto de uno o varios números primos.

Paso base: $P(2)$ se cumple pues 2 es primo.

Paso de Inducción: Sea $n \geq 2$ y supongamos que $P(2), P(3), \ldots, P(n)$ se cumplen.

Si $n+1$ es primo, entonces $P(n+1)$ es cierta.

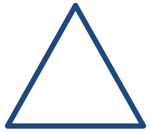
Si $n+1$ no es primo, entonces $n+1 = h \cdot k$ con $2 \leq h, k < n+1$.

Como $P(h)$ y $P(k)$ son ciertas, se concluye que $n+1$ también se puede expresar como producto de primos y por lo tanto $P(n+1)$ es cierta.

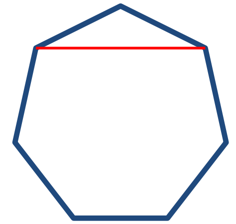
Ejemplo: Probar que todo polígono, convexo o no, es triangularizable.

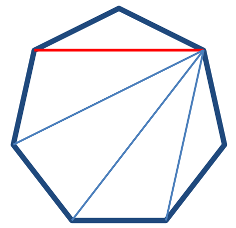
Caso 1: Polígono convexo

Paso base:



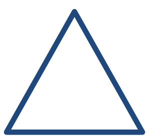
Paso de inducción:





Caso 1: Polígono general

Paso base:



Paso de inducción: